Ogólna teoria całki
Lista 2

Zad 1. Udowodnić, że ciągi funkcji f_n są zbieżne prawie wszędzie (względem miary Lebesgue'a) na $\mathbb{R}$ oraz wyznaczyć ich granice.

a) $f_n(x) = \sin^n(x)$,

b) $f_n(x) = \sqrt[n]{|\cos x|}$,

c) $f_n(x) = e^{-n \sin \pi x^2}$.

Zad 2. Niech $E = [0, 2]$. Sprawdzić, czy ciąg funkcji $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega prawie wszędzie na E do funkcji ciągłej. Skonstruować podzbiór $M \subset E$ taki, aby ciąg $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbiegał na M jednostajnie.

a) $f_n(x) = (\frac{x}{2})^n$

b) $f_n(x) = \sin^n(\pi x)$,

c) $f_n(x) = t^2(\sin t^2)^n$,

d) $f_n(x) = (\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} t)^n + (\sin 2t)^n$.

Definicja. Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią z miarą i niech $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi. Powiemy, że ciąg $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega do f względem miary μ, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Będziemy wtedy pisać $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Zad 3. Pokazać, że jeżeli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i $f_n \xrightarrow{\mu} g$, to $f = g$ prawie wszędzie.

Zad 4. Pokazać, że jeżeli $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i f_n zbiega do g prawie wszędzie, to $f = g$ prawie wszędzie.

Zad 5. Podać przykład ciągu funkcji zbieżnego względem miary, który nie jest zbieżny prawie wszędzie.

Zad 6. Udowodnić, że zbieżność prawie wszędzie na przestrzeni z miarą skończoną pociąga za sobą zbieżność względem miary.

Zad 7. Niech $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą liczącą. Pokazać, że zbieżność względem miary w tej przestrzeni równoważna jest zbieżności jednostajnej.

Zad 8. Korzystając z poprzedniego zadania podać przykład ciągu funkcji mierzalnych zbieżnego prawie wszędzie, a nie zbieżnego względem miary.

Zad 9. Niech $f_n \xrightarrow{\mu} f$ i $g_n \xrightarrow{\mu} g$. Pokazać, że

a) $|f_n| \xrightarrow{\mu} |f|$,

b) $f_n \pm g_n \xrightarrow{\mu} f \pm g$,

c) $(f_n)^+ \xrightarrow{\mu} f^+$.